



**CONCOURS D'ENTREE A L'EAMAU**  
**SESSION DE MAI 2014**  
**EPREUVE DE MATHEMATIQUE**



**FILIERES : ARCHITECTURE, URBANISME ET GESTION URBAINE**

**EXERCICE 1**

On considère les intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$  ;  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$ .

1) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ? Calculer  $I$ .

2) Soit  $f$  la fonction ;  $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

Démontrer que  $f$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et que pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle  $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ .

En déduire du calcul précédent une relation entre  $I$  et  $J$ , puis calculer  $J$ .

**EXERCICE 2**

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$  orthonormal, on considère les quatre points suivants :  $A(-2; 3)$  ;  $B(2; 1)$  ;  $C(2; 4)$  ;  $D(5; 2)$ .

- 1) Justifier que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont pas parallèles.
- 2) Déterminer les coordonnées du point  $M$  intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .
- 3) Déterminer les coordonnées de l'unique point  $B'$  vérifiant que le point  $M$  soit le milieu du segment  $[BB']$ .

Justifier que la droite  $(CD)$  est la médiatrice du segment  $[BB']$ .

**EXERCICE 3**

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère les intégrales :  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin(x) dx$  et

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos(x) dx$$

- 1) Calculer  $I_0$  et  $J_0$ .
- 2) Soit  $n$  un entier naturel non nul.
  - a) En intégrant par partie  $I_n$  puis  $J_n$  prouver que  $I_n$  et  $J_n$  vérifient le système :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$

- b) En déduire pour tout  $n$  entier naturel non nul les expressions de  $I_n$  et  $J_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .